OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1914. N° 5—6.

DEN MOLEKULARE LUFTMODSTAND MOD EN PLADE, DER BEVÆGER SIG.

FORELAGT I MØDET D. 27. NOVBR. 1914

AF

MARTIN KNUDSEN.

1. Indledning.

I et tidligere Arbejde[1] har jeg paavist, at den Varmemængde, som et Legeme afgiver ved Varmeledning gennem den omgivende Luft, er i høj Grad afhængig af Legemets Overfladebeskaffenhed. Dette Forhold saavel som det Temperaturspring, der forekommer ved Varmens Overgang fra et fast Legeme til Luft eller omvendt, har jeg med Benyttelse af den kinetiske Teori forklaret ved Indførelse af Akkomodationskoefficienten a, som en for Stødet mellem Luftmolekuler og et fast Legeme karakteristisk Konstant, der er forskellig for forskellige Luftarter og forskellige Overflader. Har de Molekuler, som støder mod Legemet, Energien E_1 efter Stødet og Energien E_2 før Stødet, og vilde de samme Molekuler have haft Energien E_1', hvis de var i Temperaturligevægt med Legemet, har man til Bestemmelse af a

$$a = \frac{E_1 - E_2}{E_1' - E_2},$$

hvor $E_1 - E_2$ er den Varmemængde, som Legemet afgiver til Luften ved Ledning. Størrelsen a, der maa være beliggende mellem 0 og 1, fandtes ved Varmeledningsforsøgene

[1] MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. **34,** p. 593.

at variere mellem Grænserne 0,25 for blankt Platin og Brint og 0,975 for stærkt platineret Platin og Kulsyre. En Række molekulare Varmeledningsbestemmelser, som jeg senere har udført, gav følgende Værdier for a for et blankt valset Platinbaand i forskellige Luftarter:

	Brint	Ilt	Kulsyre	Helium	Argon	Neon
$a =$	0,278	0,800	0,807	0,338	0,852	0,653

Størrelsen a fremkommer som et Forhold mellem en eksperimental Maaling af en Varmeledningsevne og en teoretisk Værdi for Varmeledningsevnen beregnet ved Hjælp af den kinetiske Teori, saa at Maalingerne i Virkeligheden ikke kan give nogen positiv Oplysning om Berettigelsen af den udviklede Betragtningsmaade, ved hvilken a er blevet indført. Er Betragtningsmaaden imidlertid rigtig, maa man vente, at Akkomodationskoefficienten ogsaa maa faa Indflydelse paa Størrelsen af en Modstand, som et Legeme møder, naar det bevæger sig i en Luftart, naar Legemets Dimensioner eller Afstandene fra Legemet til faste Vægge er af samme Størrelsesorden som eller smaa i Sammenligning med Luftmolekulernes Middelvejlængde, og naar Legemets Overflade eller en Del deraf har Bevægelseskomposanter i Retning af Overfladenormalerne. Medens den Akkomodationskoefficient a, som indgaar i Varmeledningsteorien, er et Forhold mellem Energimængder og for fleratomige Luftmolekuler vedrører saavel den translatoriske Energi som den indre Energi i Molekulerne, maa Akkomodationskoefficienten a_1, som indføres i Teorien for Luftmodstanden mod et bevæget Legeme, opfattes som et Forhold mellem Bevægelsesmængder eller Hastigheder. For enatomige Luftarter kan man vente, at a og a_1 er identiske, medens man for fleratomige Luftarter meget vel kan tænke sig, at a_1 er forskellig fra a, idet a_1 alene vedrører Luftmolekulernes translatoriske Energi.

En Række sammenhørende Bestemmelser af a og a_1

vilde derfor have ganske særlig Interesse, idet man derved ogsaa vilde faa bestemt Akkomodationskoefficienten a_2 for den indre Molekularenergi alene, og det er muligt, at denne aftager langt raskere med aftagende Temperatur end Luftarternes Varmefylde, thi selv om a_2 blev saa lille som 10^{-6}, vilde en Temperaturdifferens mellem en Brintmasse paa 1 cm^3 og en omgivende Tærning udlignes til $^1/_{1000}$ af den oprindelige Værdi i Løbet af ca. $^1/_2$ Minut og formentlig faa samme Betydning ved en Varmefyldebestemmelse, som hvis a_2 havde haft den størst mulige Værdi 1.

At bestemme sammenhørende Værdier af a og a_1 har jeg forsøgt, men uden at opnaa paalidelige Resultater paa Grund af Vanskeligheden ved en tilstrækkelig nøjagtig Bestemmelse af a_1 saavel i eksperimentel som i teoretisk Henseende. I det følgende kan derfor blot paavises, at Akkomodationskoefficienten har den Betydning for Luftmodstandens Størrelse, som kan ventes ifølge Teorien.

2. Teoretiske Betragtninger.

Findes der N_c Molekuler med Hastigheder mellem c og $c + dc$ i hver cm^3 af en hvilende Luftmasse, og bevæger et Legeme sig med Hastigheden v gennem denne Luftmasse, vil et Overfladeelement dS, hvis Normal danner Vinklen x med Legemets Bevægelsesretning, i hvert Sekund modtage et Antal Molekulestød dn_c bestemt ved $dn_c = N_c\, ds\, \frac{d\omega}{4\pi}\, (c \cos x + v \cos x_1)$ fra de Molekuler, som har Hastighedsretninger (mod Fladeelementet) i Rumvinklen $d\omega$, hvis Frembringere danner Vinklen x med Fladeelementets Normal. Udtrykket gælder dog kun med Tilnærmelse, idet v forudsættes at være lille i Sammenligning med Molekulhastigheden c.

Kaldes Massen af hvert Luftmolskul m og tages kun Hensyn til Bevægelsesmængdekomposanten i den Retning, i hvilken Legemet bevæger sig, vil Molekulerne, mens de modtager Legemets Hastighed v, give dette Bevægelsesmængden

$$mdn_c\ (c \cos z + v),$$

hvor z er den Vinkel, som Rumvinklen $d\omega$ danner med Legemets Bevægelsesretning. Disse dn_c Molekuler udsendes dernæst fra dS, og ifølge tidligere Undersøgelser[1] gaar vi ud fra, at naar Molekulerne tilbagekastes, vil deres Hastighedsretninger være ligelig fordelt over enhver Azimut om Normalen og deres Udfaldsvinkler bestemt ved cos.-Loven.

Den Hastighed c_1, hvormed et Molekul fjerner sig fra Fladeelementet, maa dels være bestemt ved den Hastighed c_2, hvormed det nærmer sig Fladeelementet, og dels ved dettes Temperatur. I Analogi med Forholdene ved den molekulare Varmeledning indføres Akkomodationskoefficienten a_1 bestemt ved

$$a_1 = \frac{c_1{}^2 - c_2{}^2}{c_1'^{\,2} - c_2^2}$$

hvor c_1' betyder den Hastighed, som den betragtede Molekulgruppe vilde have haft, hvis Luften havde været i termisk Ligevægt med det Legeme, hvortil Fladeelementet hører. Idet vi antager, at Legemet har samme Temperatur som det Kar, hvori Luften findes, og følgelig samme Temperatur som Luften selv, kan vi altsaa erstatte c' med c, medens vi for den relative Hastighed c_2 har $c_2 = c + v \cos z$. Indsættes dette i Udtrykket for a_1, faar man

$$c_1{}^2 = c^2 \left(1 + 2\,\frac{v}{c}\,(1 - a_1)\cos z\right)$$

eller

$$c_1 = c\left(1 + \frac{v}{c}\,(1 - a_1)\cos z\right)$$

For at faa en klar Forestilling om, hvad dette Udtryk betyder, sætter vi eksempelvis $a_1 = 0$. Man faar da $c_1 = c + v \cos z$ eller $c_1 = c_2$. Den betragtede Molekulgruppes relative Hastighed i Forhold til Fladeelementet er da den samme efter Stødet som før Stødet, og den Bevægelses-

[1] M. KNUDSEN: Ann. d. Phys. **28**, p. 77, 1909 og **35**, p. 389, 1911.

mængde, som Fladeelementet derved modtager, maa være den størst mulige.

I Almindelighed har man, at i en hvilende Luftmasse med N Molekuler i hver cm^3, er Stødtallet $^1/_4\, N\overline{c_1}$, og at den Bevægelsesmængde, som derved afgives af Luftmolekulerne til Fladeenheden, idet Molekulerne fra Hastigheden Nul opnaar deres endelige Hastighed c_1, er $\frac{1}{6}Nm\overline{c_1{}^2}$. I disse Udtryk betegner $\overline{c_1}$ og $\overline{c_1{}^2}$ Middelværdierne af de forekommende c_1 og $c_1{}^2$, og Udtrykkene gælder, hvorledes Hastighederne end er fordelt. Hvert stødende Molekul giver altsaa Fladeenheden en Bevægelsesmængde, som i Gennemsnit er

$$\frac{2}{3}m\frac{\overline{c_1{}^2}}{\overline{c_1}},$$

hvorledes Fordelingsloven end er.

For de her betragtede dn_c Molekuler er c konstant og ligesaa z og a_1, og c_1 maa selvfølgelig ogsaa være konstant, hvis den anførte Formel for c_1 har Gyldighed. For $a_1 = 0$ er Formlen utvivlsomt rigtig, og man kan da ogsaa vente, at den har tilnærmet Gyldighed for smaa Værdier af a_1, d. v. s. i saadanne Tilfælde, hvor den numeriske Værdi af ethvert enkelt Molekuls relative Hastighed i Forhold til det bevægede Legeme kun forandres meget lidt ved et Stød mod Legemet.

Idet vi altsaa her forudsatte, at $\overline{c_1{}^2} = c_1{}^2$ og $\overline{c_1} = c_1$, giver de dn_c Molekuler Fladeelementet en Bevægelsesmængde i Sekundet, der i Bevægelsens Retning har Komposanten

$$dn_c \cdot \frac{2}{3} mc_1 \cos x_1.$$

Adderes denne Bevægelsesmængde til, den, som Molekulerne afgiver, mens de modtager Legemets Hastighed, og som foran fandtes at være $mdn_c\,(c \cos z + v)$, faas

$$mdn_c\left(c \cos z + v + \frac{2}{3}c_1 \cos x_1\right);$$

indsættes heri den foran fundne Værdi for c_1 og dn_c, faas ved Integration med Hensyn til $d\omega$ over Halvkuglen og ved Middeltalsdannelse med Hensyn til alle forekommende Værdier af c og c^2, at den hele Bevægelsesmængde, som Fladeelementet dS modtager i hvert Sekund, bliver

$$\frac{1}{4}NmdS\left[\frac{4}{3}\overline{c^2}\cos x_1 + v\bar{c}\left(1 + \frac{25 - 4a_1}{9}\cos^2 x_1\right)\right].$$

Integreres med Hensyn til dS over et Legemes hele Overflade, forsvinder første Led, som er Trykkets Projektion paa Bevægelsesretningen, og man faar, at den hele Bevægelsesmængde B, som Luften i hvert Sekund meddeler et Legeme, der har Overflade S, og som bevæger sig med Hastigheden v gennem Luften, bliver

$$B' = \frac{1}{4}Nm\bar{c}v\int_s\left(1 + \frac{25 - 4a_1}{9}\cos^2 x_1\right)dS.$$

Den saaledes fundne Luftmodstand B' gælder strengt taget kun for det Tilfælde, at $a_1 = 0$, og kan ventes at gælde med Tilnærmelse, naar a_1 er lille. Har de to Sideflader af en uendelig tynd plan Plade tilsammen Arealet A, vil Pladen alsaa møde en Luftmodstand B'_2, naar den bevæger sig i tangentiel Retning, $\left(x_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, hvor

$$B'_2 = \frac{1}{4}Nm\bar{c}vA,$$

og en Luftmodstand B'_1, naar den bevæger sig i Retning af Normalen ($x_1 = 0$), hvor

$$B'_2 = \frac{1}{4}Nm\bar{c}vA\cdot\frac{34 - 4a_1}{9}.$$

Forholdet $\frac{B'_2}{B'_1} = y'$ mellem de to Modstande bliver følgelig

$$y' = \frac{34 - 4a_1}{9}.$$

For Grænseværdien $a_1 = 0$ bliver $y = 3{,}777\ldots..$, der er den største Værdi, som dette Forhold kan faa. Indsættes den anden Grænseværdi $a_1 = 1$, bliver $y = 3{,}333\ldots..$, men som det nu skal vises, kan den anvendte Beregningsmaade ikke anvendes paa dette Tilfælde, saa den her fundne lavere Grænseværdi for y maa ventes at være urigtig.

Fra Forsøgene over den molekulare Varmeledningsevne er det naturligt, at man med Akkomodationskoefficienten $a_1 = 1$ forbinder den Forestilling, at Luftmolekulerne, som rammer det bevægede Legeme, bliver fuldstændig absorberede af dette og antager dets Temperatur, hvorpaa de udsendes til alle Sider efter cos. Loven og med Hastigheder, hvis numeriske Værdier er fordelt efter Maxwells Lov, hvorledes end Hastigheden af den betragtede Molekulgruppe har været før Stødet.

Ligesom i det forrige Tilfælde giver de dn_c Molekuler Fladeelementet Bevægelsesmængden $mdn_c\,(c \cos z + v)$, idet Molekulerne modtager Fladeelementets Hastighed, og mens Molekulerne opnaar Hastigheden c_1, vil de yderligere afgive Bevægelsesmængdekomposanten

$$dn_c \cdot \frac{2}{3} m \frac{\overline{c_1^{\,2}}}{\overline{c_1}} \cos x_1$$

i Legemets Bevægelsesretning.

Om Hastighederne c_1 ved vi imidlertid, at de er fordelt efter Maxwells Lov, og i saa Tilfælde har man

$$\frac{1}{3}\overline{c_1^{\,2}} = \frac{\pi}{8}(\overline{c_1})^2,$$

hvorved ovenstaaende Udtryk omformes til

$$dn_c \cdot \frac{\pi}{4} m\bar{c} \cos x_1\,,$$

idet man erindrer, at Legemet er i Temperaturligevægt med Luften, saa man har $\overline{c_1} = \bar{c}$

Idet Molekulerne i dette Tilfælde forlader Legemet med

Hastigheder, der alene er bestemt ved dettes Temperatur, giver de Legemet den mindst mulige Bevægelsesmængde.

Den hele Bevægelsesmængde, som de dn_c Molekuler afgiver ved Stødet mod Fladeelementet, bliver altsaa

$$mdn_c\left(c\cos z + v + \frac{\pi}{4}\bar{c}\cos x_1\right).$$

Indsættes heri Udtrykket for dn_c og integreres med Hensyn til $d\omega$ og tages Middelværdier af c og c^2, faas

$$\frac{1}{4}NmdS\left[\frac{4}{3}\bar{c^2}\cos x_1 + v\bar{c}\left(1+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2 x_1\right)\right].$$

Integreres med Hensyn til dS over Legemets hele Overflade, faas

$$B'' = \frac{1}{4}Nm\bar{c}v\int_s\left(1+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2 x_1\right)dS$$

gældende for det Tilfælde, at Akkomodationskoefficienten $a_1 = 1$. I dette Tilfælde faar den tynde Plade, der bevæger sig i tangentiel Retning Modstanden

$$B_1'' = \frac{1}{4}Nm\bar{c}vA,$$

der er det samme Udtryk, som gælder for smaa Værdier af a_1. Derimod bliver Modstanden mod Bevægelse i Normalens Retning

$$B_2'' = \frac{1}{4}Nm\bar{c}vA\left(2+\frac{\pi}{2}\right).$$

Forholdet $y'' = \frac{B_2''}{B_1''}$ mellem de to Modstande bliver følgelig

$$y'' = 2 + \frac{\pi}{2} = 3{,}5708,$$

som maa erstatte den tidligere fundne Grænseværdi 3,333....
De fundne Grænseværdier for det anførte Forhold er følgelig

for $a_1 = 0$ 3,7777

for $a_1 = 1$ 3,5708.

Hvorledes Forholdet varierer mellem disse Grænser med varierende Værdier af a_1, kan næppe afgøres, og man kan da som første Tilnærmelse antage, at Forholdet varierer lineært, saaledes som det er antydet i Formlen, der angiver B' udtrykt ved a_1, hvor a_1 er lille. Koefficienten til a_1 er i denne Formel 4. Erstattes denne Værdi med 1,8628, bliver Formlen

$$B = \frac{1}{4} N m \bar{c} v \int_s (1 + 2{,}777\,(1 - 0{,}0745\,a_1) \cos^2 x_1)\, dS\,,$$

der med Tilnærmelse angiver den Modstand, som et Legeme møder i Luften, hvilken Værdi Akkomodationskoefficienten a_1 end har, idet Formlen giver de rette Grænseværdier for $a_1 = 0$ og $a_1 = 1$.

Ifølge denne almindelige Formel bliver Luftmodstanden mod en Kugle med Radius R

$$B \text{ (Kugle)} = \frac{1}{4} N m \bar{c} v\, 4\pi R^2 (1{,}926 - 0{,}069\,a_1),$$

eller med Indførelse af Luftartens Tryk p Dyn/cm^2, absolut Temperatur T og Molekularvægt M faar man, idet

$$\frac{1}{4} N m \bar{c} = 43{,}75\; 10^{-6}\, p \sqrt{\frac{M}{T}}\,,$$

$$B \text{ (Kugle)} = 84{,}25 \cdot 10^{-6} (1 - 0{,}036\,a_1) \cdot 4\pi R^2 \cdot p \sqrt{\frac{M}{T}}\,.$$

Denne Formel gælder ligesom de øvrige kun under den Forudsætning, at Kuglens Radius er forsvindende lille i Sammenligning med Molekulernes Middelvejlængde.

For en tynd Flade bliver Forholdet y mellem Luftmodstanden, naar Fladen bevæger sig i Normalens Retning, og naar den bevæger sig vinkelret derpaa,

$$y = 3{,}778\,(1 - 0{,}055\,a_1). \tag{1}$$

3. Maalinger.

Til den eksperimentelle Undersøgelse af Akkomodationskoefficientens Indflydelse paa Luftmodstanden anvendtes forskellige Metoder, der gik ud paa at maale Luftdæmpningen mod en i en Kvartstraad ophængt Plade eller Pladepar, hvis Plan gik igennem Omdrejningsaksen. Modstandsmaalingerne foretoges ved forskellige Lufttryk. Kaldes Luftmodstanden mod en Fladeenhed, der bevæger sig med Hastigheden 1 cm/sec. i Normalens Retning, k', beregnedes $\left(\frac{dk'}{dp}\right)_{p=0}$ af Observationerne. Er k Luftmodstanden mod en Fladeenhed, der bevæger sig i Retning af en Tangent, beregnedes den teoretiske Værdi for $\left(\frac{dk}{dp}\right)_{p=0}$, og Forholdet $y = \left(\frac{dk'/dp}{dk/dp}\right)_{p=0}$ dannedes. Der fandtes følgende Værdier for y for blankt Platin

	Brint	Ilt	Kulsyre	Argon	Heiium
$y =$	3,85	3,74	3,71	3,80	3,90

Gangen i disse Værdier stemmer ganske godt med, hvad man kunde vente, men de absolutte Størrelser syntes mig uforklarlig høje. For at undgaa en meget stor Del af de de mange Fejlkilder, som kan faa Indflydelse paa Bestemmelserne, lavedes derfor en ny og mere stabil Opstilling, hvorved saavel k' som k samtidig maaltes direkte. Til Maalingerne anvendtes to blanke Nysølvplader ca. 10 cm lange og 1 cm brede. Midten af den ene Plades Sideflade fæstedes paa Enden af en Aluminiumstang, der var forsynet med Aflæsningsspejl og et lanseformet Øje til Ophængning i en Kvartstraad. Denne Strimmel vilde altsaa svinge i sit eget Plan. Til en ganske lignende Aluminiumstang med Spejl fæstedes Midten af den anden Nysølvplades ene lange Kant, saa Plade og Aluminiumstang ligger i samme Plan. Denne Plade vil altsaa svinge vinkelret paa sin Plan. En Udmaaling af Nysølvpladerne gav følgende Værdier for deres Dimensioner. For den vandrette Plade betegner l Længden, b Bredden, d Tykkelsen, ρ Vægtfylden, i Inertimomentet, m Modstandsmomentet og k Luftmodstanden mod hver Fladeenhed. For den lodrette Plade benyttes de samme Betegnelser med Mærker.

$l = 10{,}010$ cm $b = 0{,}9970$ cm $d = 0{,}031$ cm $\rho d = 0{,}2634$ $i = 22{,}174$
$l' = 10{,}004$ cm $b' = 0{,}9924$ cm $d' = 0{,}031$ cm $\rho' d' = 0{,}2622$ $i' = 21{,}706$.

De to Aluminiumstænger med Aflæsningsspejle var ganske ens. Af deres enkelte Deles Vægt og Dimensioner beregnedes deres Inertimoment $i_1 = 0{,}027$ og deres Modstandsmoment $m_1 = 0{,}500\,k' + 0{,}070\,k$.

Idet man tager Hensyn til de svingende Pladers Rande, findes deres Modstandsmomenter at være for den vandrette Plade, idet r er Afstanden fra Fladeelementet dS til Omdrejningsaksen,

$$m = \int_S kr^2 dS + 2k\frac{l^2}{4}bd + \int_{r=0}^{r-\frac{l}{2}} 4k'r^2 ddv + 4kb^2 ld\,,$$

for den lodrette Plade

$$m' = \int_{S'} kr^2 dS' + 2k\frac{l^2}{4}bd + \int_{r=0}^{r=l/2} 4kr^2 ddv\,.$$

Er γ det logaritmiske Dekrement bestemt som den naturlige Logaritme til Forholdet mellem to paa hinanden følgende Udsvingsvinkler med Bevægelse til samme Side, og beregner man af de aflæste Udsving Størrelsen $A = \frac{2\gamma}{\tau}$ og $A' = \frac{2\gamma'}{\tau'}$, og er M Modstandsmomentet for det hele svingende System med Plade, har man

$$A = M/(i+i_1) \text{ og } A' - M'/(i'+i_1)\,.$$

Til Beregning af den Del af Pladernes Modstandsmomenter, som hidrører fra de store Sideflader, hvis Areal tilsammen er S, bemærkes, at

$$\int_S kr^2 dS = \frac{2k}{\rho d}i \quad \text{og} \quad \int_{S'} k'r^2 dS' = \frac{2k'}{\rho' d'}i'\,.$$

Ved denne Transformation gøres Maalingsresultaterne i høj Grad uafhængige af Udmaalingen af de to Pladers Dimensioner, idet Pladerne var udskaaret tæt ved hinanden af samme Stykke Nysølvsblik, og man derfor kan antage, at begge Pladers Tykkelser er fordelt paa samme Maade om deres Omdrejningsakser.

I Modstandsmomenterne M og M' indgaar som Addender de Modstandsmomenter, som hidrører fra, at en Del af Svingningsenergien omdannes til Varme i Ophængningstraaden og dens Befæstelsessteder. Ved Differentiation af A og A' med Hensyn til Trykket p forsvinder disse Led, saa man faar, idet de opgivne Talværdier indsættes,

$$\frac{dA}{dp}(i+i_1) = \left(\frac{2i}{\rho d}+1{,}77\right)\frac{dk}{dp}+5{,}67\frac{dk'}{dp}$$

$$\frac{dA'}{dp}(i'+i_1) = \left(\frac{2i'}{\rho' d'}+0{,}500\right)\frac{dk'}{dp}+6{,}79\frac{dk}{dp}$$

De svingende Systemer var anbragt i hver sin Glasbeholder, der var forbundet med et Rør, som førtes videre til et Siderør, som anbragtes i flydende Luft, hvorfra Glasrørledningen førtes til en Molekularluftpumpe og til et Pipettesystem, gennem hvilket kendte Luftmængder kunde indføres i Apparatet. Udsvingene af de svingende Systemer bestemtes ved to Aflæsningskikkerter, og der sørgedes for, at den hele Opstilling var saa symmetrisk som muligt med Hensyn til de to Svingningsbeholdere.

Størrelserne dA og dA' bestemtes derved, at A og A' maaltes med Vakuum i Apparatet og dernæst maaltes igen, idet Trykket forøgedes med en kendt Værdi dp.

Sætter man $\frac{dA'}{dp}:\frac{dA}{dp} = x$ og $\frac{dk'}{dp}:\frac{dk}{dp} = y$, faar man af ovenstaaende Ligninger:

$$y = \frac{x-0{,}0407}{0{,}9974-0{,}0333x}. \qquad (2)$$

Som man ser, opnaar man ved denne Fremgangsmaade, at en Fejl paa Inertimomentbestemmelserne faar megen ringe Indflydelse paa y og det samme gælder Fejl paa Bestemmelse af dp samt mangelfuld Renhed af de benyttede Luftarter. En langsom Luftangivelse fra Apparatets Vægge og Temperaturforandringer bliver ligeledes for største Delen eliminerede, og man undgaar Ekstrapolation, naar dp vælges ret lille, da $\frac{dk}{dp}$ og $\frac{dk'}{dp}$ meget nær aftager paa samme Maade med voksende p, idet de to Pladers Dimensioner er ens og derfor staar i samme Forhold til Luftmolekulernes Middelvejlængde. Ved særlige Forsøgsrækker fandtes for Brint, at

$$\frac{dy}{dp} = -0{,}059 \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Dyn}},$$

og en dobbelt saa stor Værdi for Ilt svarende til, at Iltens Middelvejlængde er ca. halv saa stor som Brintens ved samme Tryk.

Forsøgene udførtes nu paa den Maade, at Apparatet pumpedes tomt og henstod en Ugestid med jævnlig Udpumpning, for at Glasvæggene og Metallet kunde afgive største Delen af den adsorberede Luft. Apparatet udpumpedes derpaa ved Pumpning i et Par Timer, og de to Plader sattes i Svingning ved Hjælp af smaa Jerntraadstykker, der var fæstet paa Ophængningsstængerne. I fast Forbindelse med hver Svingningsbeholder var anbragt en Traadrulle paa hver Side af Beholderen, og ved at sende en elektrisk Strøm gennem disse Traadruller paavirkedes de smaa Jernstykker magnetisk, hvorved Systemet kunde bringes i Svingning. Man aflæste nu to paa hinanden følgende Yderstillinger af den ene Plade og umiddelbart derefter to paa hinanden følgende Yderstillinger af den anden Plade. Efter ca. 1 Times Forløb gentoges disse Maalinger, og af de saaledes fundne Tal og de tilhørende Tidsobservationer beregnedes A og A'. Umiddelbart efter de sidste Maalinger toges et nyt Sæt, som sammentaget med Maalinger ved Slutningen af den anden Time gav et nyt Sæt Værdier for A og A'. Paa denne Maade fortsattes i ca. 9 Timer. I Løbet af denne Tid formindskedes Udslaget for den vandrette Plade fra 58,26 til 49,60 Skaladele (efter Reduktion fra *tg* til Vinkelmaal), medens Udslaget for den lodrette Plade formindskedes fra 58,65 til 45,60. Som det vil ses af nedenstaaende Tabel tiltager Dæmpningen i Tidens Løb, fordi der afgives adsorberet Luft fra Apparatet. Den saaledes udskilte Luft pumpedes bort, hvorpaa saa megen Brint bragtes ind i Apparatet ved Hjælp af Pipettesystemet, at Trykket i Apparatet steg med 0,259 Dyn/cm^2. Der toges nu med Brinten en ganske lignende Række Dæmpningsbestemmelser som i Vakuum. Udslaget for den vandrette Plade formindskedes derved fra 58,03 til 40,05 og for den lodrette fra 58,21 til 22,99. Brinten udpumpedes og erstattedes med Ilt med Trykket 0,103 Dyn/cm^2, og Maalingerne gentoges atter hver Time i ca. 9 Timer. Den vandrette Plades Udslag formindskedes derved fra 58,16 til 39,03, medens den lodrette Plades Udslag formindskedes fra 57,93 til 21,21.

I efterfølgende Tabel er opført de i hver enkelt Time fundne Dæmpninger, idet de opførte Talværdier for Dæmpningerne dog skal multipliceres med $2{,}3026 \cdot 10^{-8}$ for at give de med A og A' tidligere betegnede Størrelser.

Time	Lodret Plade			Vandret Plade			x	x
	Vakuum	Brint	Ilt	Vakuum	Brint	Ilt	for Brint	for Ilt
0								
	243	1057	1274	185	427	506	3,36	3,21
1								
	237	1041	1299	177	423	512	3,27	3,17
2								
	238	1056	1303	183	431	509	3,30	3,27
3								
	273	1087	1266	185	437	514	3,23	3,02
4								
	302	1101	1317	198	444	526	3,25	3,10
5								
	317	1143	1235	204	453	526	3,32	2,85
6								
	350	1168	1351	215	460	537	3,34	3,11
7								
	393	1201	1398	224	469	552	3,30	3,07
8								
	445	1252	1477	238	487	555	3,24	3,26
9								

Den Del af Middelfejlen, som findes paa de opførte Dæmpningsværdier, og som hidrører fra Aflæsningsfejl, kan anslaas til 3 Enheder paa sidste Ciffer. Man ser, at der under Forsøgsrækkerne har fundet en Dæmpningsstigning Sted, der for den lodrette Plade udgør 202 i Vakuum, 195 i Brint og 203 i Ilt. Denne Stigning skyldes utvivlsomt en Luftafgivelse fra Glas og Metal, og man ser, at den har meget nær samme Størrelse i de tre Tilfælde. For den vandrette Plade er Dæmpningsstigningerne 53 i Vakuum, 60 i Brint og 49 i Ilt, altsaa Værdier, der ogsaa er omtrent lige store. For den lodrette Plade er Middelstigningen altsaa 200 og for den vandrette 54, hvilket giver Forholdet $x = 3{,}7$ for den under Forsøgene udviklede Luftart. Denne Værdi er saa nær lig med de i Tabellen opførte Værdier for x, at man heri ser Berettigelsen af at behandle Talmaterialet paa den Maade, som er benyttet. Man ser, at Dæmpningsstigningerne kun er ringe i Forsøgenes Begyndelse og først efter 3 Timers Forløb naar en kendelig Værdi. Selv om man tager Hensyn til denne Dæmpningsstigning, viser dog de anførte Dæmpningsværdier en indbyrdes Uoverensstemmelse, som langt fra kan bortforklares ved Usikkerheden paa Aflæsningerne. Denne Uoverensstemmelse maa formentlig søges deri, at Torsionssvingningsenergien kan overføres til Pendulbevægelser i det svingende System, og at den saaledes overførte Energi atter delvis kan overføres til Torsionssvingningsenergi igen. Under Observationerne viste det sig nemlig, at Aflæsningskikkertens Traadkors beskrev en Bølgelinie henover Maalestokkenes Spejlbilleder, og de saaledes iagttagne Pendulsvingningsamplituder viste sig at variere betydelig i Størrelse. Det var netop for saa vidt muligt at eliminere den derved foraarsagede Usikkerhed, at Undersøgelserne gennemførtes med saa ringe Tryk i Apparatet, at de enkelte Maalingsrækker kunde strækkes over saa lang Tid som 9 Timer hver.

De i Tabellen opførte Enkeltværdier for Brint og Ilt er fundet ved at subtrahere Dæmpningen i Vakuum fra Dæmpningen i Luften og danne Forholdet mellem den saaledes fundne Differens for den lodrette Plade og for den vandrette Plade. Paa Grund af den ovenfor omtalte Usikkerhed varierer x kendeligt i hver af de to Rækker, men dog ikke mere, end at man med Sikkerhed kan paastaa, at x er større for Brint end for Ilt.

Dannes Middelværdierne af hver af de to Rækker for x, faar man

$$\text{for Brint } x = 3{,}29 \pm 0{,}015$$
$$\text{for Ilt } x = 3{,}12 \pm 0{,}044,$$

hvor Middelafvigelserne er beregnet direkte af de to Rækker. Beregnes x, idet man kun tager Hensøn til første og sidste Udsving i hver Forsøgsrække, faar man de samme Værdier for x som fundet ovenfor, og Middelafvigelserne bliver noget mindre end angivet. Indsættes de saaledes fundne Værdier for x i Ligning (2), faas Forholdet y, der angiver hvor mange Gange Luftmodstanden mod en Plade, der bevæger sig i Retning af Normalen, er større end Luftmodstanden mod den samme Plade, der bevæger sig vinkelret paa Normalen. De anførte Forsøg gav for Brint $y_H = 3{,}66$ og for Ilt $y_O = 3{,}45$. Foruden disse Forsøg foretoges senere andre med Benyttelse af større Tryk i Apparatet og følgelig kunde Forsøgene ikke strækkes over saa langt et Tidsrum. Resultaterne af samtlige Forsøg, der alle har omtrent samme Nøjagtighed, er sammenstillede i følgende Tabel

$y_H =$	3,66	3,69	3,63	Middelværdi	3,66	teoretisk Værdi	3,72
$y_O =$	2,45	3,50	3,49	—	3,48	— —	3,61

De teoretiske Værdier er fundet af Ligning (1) ved at sætte $a_1 = 0{,}28$ for Brint og $0{,}80$ for Ilt.

Som man ser, er de iagttagne Værdier lavere end de beregnede, hvilket næppe kan forklares paa anden Maade end ved Iagttagelsesfejl, thi den iagttagne Værdi for Ilt er endog mindre end den teoretisk laveste Grænseværdi 3,57. Forholdet $\frac{y_H}{y_O}$ findes af de iagttagne Værdier at være 1,05, medens de teoretiske Værdier giver 1,03 for dette Forhold og de teoretiske ekstreme Værdier $a_1 = 0$ og $a_1 = 1$ giver Forholdet 1,06. Dette kan maaske tyde paa, at man ikke har været berettiget til i Teorien at antage en lineær Afhængighed mellem y og a_1.

Gaar man imidlertid ud fra, at en saadan findes, saa man kan sætte

$$y = b\,(1 - a_1 c),$$

faar man ved at benytte de anførte Værdier for a_1 for Ilt og Brint, at

	iagttaget Værdi	teoretisk Værdi
$b =$	3,75	3,78
$c =$	0,089	0,055.

Det er mig en Glæde ogsaa paa dette Sted at bringe Hr. Professor Kamerlingh Onnes, Leiden, min bedste Tak for den Beredvillighed, med hvilken han har stillet de benyttede sjældne Luftarter til min Raadighed til de i Begyndelsen af Afhandlingen refererede Akkomodationsmaalinger. Desuden skylder jeg Tak til Carlsbergfondets Direktion for bevilgede Hjælpemidler og til Frøken Kirstine Smith for værdifuld Hjælp ved Maalingernes Udførelse og Beregning.

Københavns Universitet i November 1914.